# PART4 第 2 次導関数と極値

## 要点整理と公式

### 要点 ① 第 2 次導関数と極大・極小

関数 $f(x)$ の極大・極小を判定するために，第 2 次導関数 $f''(x)$ の符号を調べる方法がある。

$f''(x)$ が連続な関数で，$f''(a)$　0 のとき，$x=a$ に十分近い $x$ においては $f''(x)$　0 であり，$f'(x)$ は　　する。さらに，$f'(a)$　0 のとき，$f'(x)$ の符号は $x=a$ を境に　から　に変わる。

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | |
| $f''(x)$ | | | |
| $f(x)$ | | | |

よって，$f(a)$ は　　　　である。

同様に，$f'(a)=0$，$f''(x)$　0 のとき，$f'(x)$ の符号は $x=a$ を境に　から　に変わり，$f(a)$ は　　　　である。

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | | | |

よって，次のことがいえる。

**第 2 次導関数と極値**

関数 $f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば $f(a)$ は極小値

$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば $f(a)$ は極大値

(ex) 関数 $f(x)=x^3-3x$ の極値

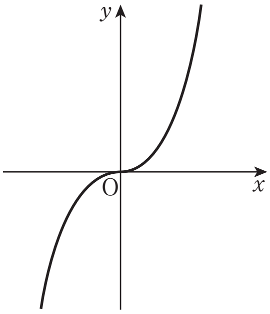
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，$f''(x)=6x$

$f'(x)=0$ となるのは $x=-1$，1

$f''(-1)=-6$　0，$f''(1)=6$　0

よって，極大値は $f($　$)=2$　　極小値は $f($　$)=-2$

$f'(a)=0$ かつ $f''(a)=0$ のときは，$f(a)$ は極値である場合もあれば，極値でない場合もある。例えば，$f(x)=x^3$ のとき，$f'(x)=3x^2$，$f''(x)=6x$ であり，$f'(0)=0$，$f''(0)=0$ であるが，$f(0)$ は極値ではない。



**4** 次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ。

(1) $f(x)=-x^4+2x^2+5$　　(2) $f(x)=x+2\cos x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$

## Point Pickup

**第 2 次導関数と極値**

関数 $f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき

$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば $f(a)$ は極小値

$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば $f(a)$ は極大値

一般に，これらの逆は成り立たない。

また，$f'(a)=0$ かつ $f''(a)=0$ のときは，$f(a)$ は極値となることも，極値にならないこともある。

# 第 12 講 PART4 確認問題

次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ。

**1** 関数 $f(x)=x^4-8x^2+7$ において，

$f'(x)=0$，$f''(x)>0$ を満たす $x$ の値は ア

$f'(x)=0$，$f''(x)<0$ を満たす $x$ の値は イ

である。

これより，極大値は ウ，極小値は エオ である。

ア，イ は下の①～④のうちから選べ。

① 0　② 0，1

③ ±1　④ ±2

**2** 関数 $f(x)=x-2\sin x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ において，

$f'($カ$)=0$，$f''($カ$)>0$

$f'($キ$)=0$，$f''($キ$)<0$

となる。

これより，極大値は ク，極小値は ケ である。

カ ～ ケ は下の①～④のうちから選べ。

[カ，キ の選択肢]

① $\dfrac{\pi}{3}$　② $\dfrac{\pi}{6}$

③ $\dfrac{5}{3}\pi$　④ $\dfrac{11}{6}\pi$

[ク，ケ の選択肢]

① $\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$　② $\dfrac{\pi}{6}-1$

③ $\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$　④ $\dfrac{5}{6}\pi+1$

# PART4 第 2 次導関数と極値

**4** 次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ。

(1)　$f(x)=-x^4+2x^2+5$　　(2)　$f(x)=x+2\cos x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$

**[解答]**

(1)　$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f''(x)=-12x^2+4$

$f'(x)=0$ となるのは $x=-1,\ 0,\ 1$

$f''(-1)=-8<0$，$f''(0)=4>0$，$f''(1)=-8<0$

よって

極大値は $x=\pm 1$ のとき $6$　　極小値は $x=0$ のとき $5$

(2)　$f'(x)=1-2\sin x$

$f''(x)=-2\cos x$

$f'(x)=0$ より $\sin x=\dfrac{1}{2}$　　$0\leqq x\leqq 2\pi$ より $x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}<0$，$f''\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\sqrt{3}>0$

よって

極大値は $x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$　　極小値は $x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき $\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

# 第12講 PART4 確認問題 解答

**1**

**[正解]** ア：④，イ：①，ウ：7，エオ：−9

**[解説]**

$$f'(x)=4x^3-16x$$
$$=4x(x^2-4)$$
$$=4x(x+2)(x-2)$$
$$f''(x)=12x^2-16$$

$f'(x)=0$ となる $x$ の値は，

$$x=-2,\ 0,\ 2$$

ここで，

$$f''(-2)=32>0$$
$$f''(0)=-16<0$$
$$f''(2)=32>0$$

以上より，

$f'(x)=0$，$f''(x)>0$ を満たす $x$ の値は，**±2**

[A]

$f'(x)=0$，$f''(x)<0$ を満たす $x$ の値は，**0**

である。

また，

$$f(-2)=-9$$
$$f(0)=7$$
$$f(2)=-9$$

よって，$x=0$ のとき，極大値 **7** [A]

　　$x=\pm 2$ のとき，極小値 **−9**

をとる。

[A]　第２次導関数と極値
関数 $f(x)$ が連続な第２次導関数 $f''(x)$ をもつとき，
$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$
　ならば，$f(a)$ は極小値
$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$
　ならば，$f(a)$ は極大値

**2** **[正解]** カ：①，キ：③，ク：③，ケ：①

**[解説]**

$$f'(x)=1-2\cos x$$ [B]

$$f''(x)=2\sin x$$

[B]　$(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$

$f'(x)=0$ より，$\cos x=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ より，$x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

ここで，

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}>0$$

$$f''\left(\frac{5}{3}\pi\right)=2\sin\frac{5}{3}\pi=-\sqrt{3}<0$$

以上より，

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0,\ f''\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$$ [C]

$$f'\left(\frac{5}{3}\pi\right)=0,\ f''\left(\frac{5}{3}\pi\right)<0$$

となる。

[C]　第 2 次導関数と極値
関数 $f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき，
$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$
　ならば，$f(a)$ は極小値
$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$
　ならば，$f(a)$ は極大値

また，

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$$

$$f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{5}{3}\pi-2\sin\frac{5}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$$

よって，$x=\dfrac{5}{3}\pi$ のとき，**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}}$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，**極小値** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}}$

をとる。